21/10/2020

Πυκνότητα Ρητών και Άρρητων:

Έστω $a<\beta$. Τότε, $(a,b)\cap \mathbb{Q}$, $(a,\beta)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

είναι άπειρα σύνολα.

Ακολουθίες

Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών.

- $a_n \to \ell$ ($\lim_n a_n = \ell$ ή $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ)

όπου $\ell \in \mathbb{R}$, αν: $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n-\ell|<\varepsilon$.

- $a_n \to +\infty$, αν $\forall M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $a_n > M$.

- $a_n \to -\infty$, αν $\forall M>$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $a_n < -M$

- Αν δεν συμβαίνει τίποτα από τα παραπάνω, τότε λέμε ότι η $\{a_n\}$ ταλαντεύεται.

Ορισμός: Η $\{a_n\}$ ονομάζεται αύξουσα (αντίστ. γν. αύξουσα) αν $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$ (αντιστ. $a_n < a_{n+1}$).

Η $\{a_n\}$ ονομάζεται φθίνουσα (αντιστ. γν. φθίνουσα) αν η $\{-a_n\}$ είναι αύξουσα (αντιστ. γν. αύξουσα).

Τέλος, η $\{a_n\}$ ονομάζεται μονότονη (αντ. γν. μονότονη), αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντ. γν. αύξουσα ή γν. φθίνουσα).

Θεώρημα: Έστω $\{a_n\}$ μία πραγματική ακολουθία.

(i) Αν $\{a_n\}$ αύξουσα, τότε
$$a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) Αν $\{a_n\}$ φθίνουσα, τότε
$$a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Ειδικότερα, αν $\{a_n\}$ μονότονη και φραγμένη τότε συγκλίνει.

Απόδειξη: (i) • Έστω ότι $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Αν $\ell := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\ell \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $a_n \leq \ell$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_{n_0} > \ell - \varepsilon$.

$\xRightarrow[\text{αύξουσα}]{\{a_n\}}$ $\forall n \geq n_0$ $a_n \geq a_{n_0} > \ell - \varepsilon$.

Όμως, $a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\forall n \geq n_0$, ισχύει $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$\Longrightarrow$ $a_n \to \ell$

• Έστω ότι η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη

Τότε, $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Επίσης, έστω $M > 0$, τότε $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_{n_0} > M$. Άρα, $\forall n \geq n_0$,

$$a_n \geq a_{n_0} > M \Longrightarrow a_n \to \infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Βάλτε $\{-a_n\}$ στη θέση της $\{a_n\}$ ☒

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε πραγματική ακολουθία $\{a_n\}$ έχει μονότονη υπακολουθία.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ο όρος $\{a_n\}$ θα ονομάζεται σημείο κορυφής της $\{a_n\}$ αν, $\forall m > n$, ισχύει $a_n > a_m$.

Θέτουμε: $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n$ σημείο κορυφής της $\{a_n\}\}$.

Περίπτωση 1 : A άπειρο σύνολο

Απλ. $\exists\ k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, τ.ω. $k_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και a_{k_n} σημείο κορυφής, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- $a_{k_1} > a_m,\ \forall m > k_1 \Rightarrow a_{k_1} > a_{k_2}$
- $a_{k_2} > a_m,\ \forall m > k_2 \Rightarrow a_{k_2} > a_{k_3}$

$\vdots$

- $a_{k_n} > a_{k_{n+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, η $\{a_{k_n}\}$ είναι φθίνουσα υπακολουθία της $\{a_n\}$

Περίπτωση 2 : Το A είναι πεπερασμένο (ή κενό).

Άρα, $\exists\ m \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq m$, ο όρος a_n δεν είναι σημείο κορυφής της $\{a_n\}$.

Θέτουμε: $k_1 = m$. Τότε (αφού $k_1 \notin A$)

$\exists\ k_2 > k_1$ τ.ω. $a_{k_2} > a_{k_1}$.

Ομοίως, (αφού $k_2 \notin A$), $\exists\ k_3 > k_2$, τ.ω. $a_{k_3} \geq a_{k_2} \ldots \exists\ k_{n+1} > k_n$, τ.ω. $a_{k_{n+1}} \geq a_{k_n} \ldots$

Ορίσαμε την υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$, η οποία είναι αύξουσα. ▨

Θεώρημα : (Bolzano - Weierstrass) :

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη: Άμεση από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα. $\boxtimes$

Ορισμός: Έστω $\{a_n\}$ πραγματική ακολουθία. Η $\{a_n\}$ λέγεται ακολουθία Cauchy, αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$,

$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Θεώρημα: Έστω $\{a_n\}$ πραγματική ακολουθία. Η $\{a_n\}$ συγκλίνει αν-ν είναι Cauchy.

Υπενθύμιση: $\{a_n\}$ συγκλίνει $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\{a_n\}$ φραγμένη

$(\exists\, m, M \in \mathbb{R}$, τ.ω. $m \leq a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \exists\, M > 0$, τ.ω. $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N})$.

Απόδειξη Θεωρήματος:

($\Rightarrow$) (Ισχύει γενικότερα σε μετρικούς χώρους)
Έστω ότι $a_n \to l \in \mathbb{R}$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon/2$
$\Rightarrow \forall m, n \geq n_0$, $|a_n - a_m| = |(a_n - l) - (a_m - l)| \leq$

$|a_n - l| + |a_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
$\Rightarrow \{a_n\}$ είναι Cauchy.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\{a_n\}$ Cauchy.
• Θδο $\{a_n\}$ φραγμένη.

Π.χ. για $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m, n \geq n_0$, $|a_m - a_n| < 1$

$\xRightarrow{n=n_0}$ $\forall n \geq n_0$, $a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$

Θέτουμε $k := \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$

$K := \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$

$\Longrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $k-1 < a_n < K+1$

Άρα, $\{a_n\}$ φραγμένη.

$\xRightarrow{B-W}$ $\exists$ $\{a_{k_n}\}$ υπακολουθία που να συγκλίνει σε κάποιο αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$.

• Θ.δ.ο. $\ell = \lim_n a_n$: Έστω $\varepsilon > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon/2$ ①

$\Longrightarrow$ $|a_n - \ell| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - \ell)| \leq$

$|a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell|$ ②

• $\{a_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall m, n \geq n_0'$,

$|a_m - a_n| < \varepsilon/2$

$\xRightarrow[\text{αύξουσα}]{\{k_n\}\text{ γν.}}$ $\forall n \geq n_0'$, $|a_{k_n} - a_n| < \varepsilon/2$ ③

$\Rightarrow k_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$

• Θέτουμε $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$ $\xRightarrow{①,②,③}$

$\forall n \geq n_0''$, $|a_n - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ. ▨

Οριακά σημεία ακολουθίας:
Το $l \in \mathbb{R}$ ονομάζεται οριακό σημείο της ακολουθίας $\{a_n\}$, αν $\exists$ $\{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$, τ.ω. $a_{k_n} \to l$.

Π.χ. $a_n = 2^n$, κανένα οριακό σημείο.

ή $a_n = \begin{cases} 3^n, & n \text{ άρτιος} \\ 1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$, ένα οριακό σημείο, το 1 ή $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ 1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$,

2 οριακά σημεία το 0 και το 1.

Παρατηρηση: Καθε φραγμένη ακολουθια έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο. Μία ακολουθία συγκλίνει αν-ν είναι φραγμένη κ' έχει ακριβώς ένα οριακό σημείο.

Θεώρημα: Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία και S το σύνολο των οριακών σημείων της. Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το S με $x_n \to l \in \mathbb{R}$. Τότε, $l \in S$ (με άλλα λόγια, το S είναι κλειστό).

Απόδειξη: • $\exists$ $k_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $|a_{k_1} - x_1| \leq 1$
(αλλιώς $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - x_1| > 1 \Rightarrow$
$\nexists$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ που να συγκλίνει στο x_1.)
• $\exists$ $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, τ.ω. $|a_{k_2} - x_2| \leq 1/2$
(αλλιώς, $\forall n > k_1$, $|a_n - x_2| > 1/2 \Rightarrow$
$\nexists$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ που να συγκλίνει στο x_2)

• $\exists$ $k_3 > k_2$, τ.ω. $|a_{k_3} - x_3| \leq 1/3$.

⋮

• $\exists$ $k_{n+1} > k_n$, τ.ω. $|a_{k_{n+1}} - x_{n+1}| \leq 1/n+1$

⋮

Ορίσαμε την υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$, τ.ω. $|a_{k_n} - x_n| \leq 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{x_n \to \ell}$ $a_{k_n} \to \ell \Rightarrow \ell \in S$. ∎

<u>Παρατήρηση</u>: Η $\{a_n\}$ είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη $\Longrightarrow$ Το σύνολο των οριακών σημείων της $\{a_n\}$ είναι άνω (ή κάτω) φραγμένο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία και S το σύνολο των οριακών σημείων της $\{a_n\}$.

Ορίζουμε: $\limsup a_n = \begin{cases} \sup S, & \{a_n\} \text{ άνω φραγ.} \\ +\infty, & \{a_n\} \text{ όχι άνω φραγ.} \end{cases}$

$\liminf a_n = \begin{cases} \inf S, & \{a_n\} \text{ κάτω φραγμένη} \\ -\infty, & \{a_n\} \text{ όχι κάτω φραγμ.} \end{cases}$

<u>Λεπτομέρεια</u>: • Αν $S = \emptyset$ & $\{a_n\}$ άνω φραγμένη $\Longleftrightarrow$ $a_n \to -\infty$. Αλλά, εξ' ορισμού: $\sup \emptyset := -\infty$. Δηλ. $a_n \to -\infty \Leftrightarrow \limsup a_n = -\infty$

• Ομοίως, αν $S=\emptyset$ κ' $\{a_n\}$ κάτω φραγμένο $\iff$ $a_n \to +\infty$. Από εξ'ορισμού:
$\inf\emptyset := +\infty$

Δηλ. $a_n \to +\infty \iff \liminf a_n = +\infty$.

Γιατί limsup και όχι suplim;

Θεώρημα: Έστω $\{a_n\}$ άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένη ακολουθία. Τότε,

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$

(αντιστοίχως $\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$)

Απόδ.: Αρκεί να δείξουμε μόνο το limsup.

Πράγματι, $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$.

Απόδειξη: (άσκηση).

• Η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Η b_n είναι άνω φραγμένη και φθίνουσα, επειδή $\{a_k : k \geq n\} \supseteq \{a_k : k \geq n+1\}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sup\{a_k : k \geq n\}}_{= b_n} \geq \underbrace{\sup\{a_k : k \geq n+1\}}_{= b_{n+1}}.$$

Άρα, $\{b_n\}$ είτε συγκλίνει είτε τείνει στο $-\infty$.

• Έστω ότι $\{b_n\}$ συγκλίνει. Θέτουμε $l = \limsup a_n$

Έχουμε ότι $a_n \not\to -\infty$ (γιατί αλλιώς $b_n \to -\infty$)

Λεπτομέρεια $\Longrightarrow$ $l \in \mathbb{R}$.

• Τότε ($l \in S$), $\exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$, τ.ω. $a_{k_n} \to l$. Όμως,

$a_{k_n} \leq b_{k_n} \to \lim b_n \Longrightarrow$
$l \leq \lim b_n$.

• Θδο $\lim b_n \leq l$. Έστω $\varepsilon > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\underline{\forall n \geq n_0}$, $|a_{k_n} - l| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \underline{l - \varepsilon < a_{k_n} < l + \varepsilon}$

Υποθέτουμε ότι $\exists$ άπειροι δείκτες $i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_i > l + \varepsilon$. Τότε, $\exists \{a_{l_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$, τ.ω. $a_{l_n} > l + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Όμως, $\{a_n\}$ άνω φραγμένη $\Longrightarrow$

$\{a_{l_n}\}$ φραγμένη $\overset{B-W}{\Longrightarrow}$ $\exists \{a_{l_{r_n}}\}$ υπακολουθία

της $\{a_{l_n}\}$ (άρα και υπακολουθία της $\{a_n\}$) που να συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $l' \geq l + \varepsilon$.
Άτοπο, γιατί l' οριακός αριθμός της $\{a_n\}$ ισ' $l' > \limsup a_n$.

Άρα, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall i \geq i_0$, $a_i \leq l + \varepsilon$
$\Longrightarrow \forall i \geq i_0$, $b_i = \sup\{a_k : k \geq i\} \leq l + \varepsilon$

$\Longrightarrow \lim_n b_n \leq l + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \lim_n b_n \leq l$.

Άρα, $\lim_n b_n = l$

- Έστω ότι $b_n \to -\infty$. Τότε, αν $M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $b_n < -M$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $\sup\{a_k : k \geq n\} < -M$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $a_n < -M$

$\Longrightarrow a_n \to -\infty \Rightarrow \limsup a_n = -\infty$. $\boxtimes$